Consideriamo un altro spazio ausiliario con gli assi cartesiani $\rho\varphi z$ e ad ogni suo punto $Q \equiv (\rho, \varphi, z)$ (con $\rho \geq 0$) facciamo corrispondere quel punto P dello spazio xyz che ha le coordinate cilindriche ρ, φ, z ossia le coordinate cartesiane definite da (5.9.4). Allora, con considerazioni analoghe a quelle del § precedente, si arriva al teorema seguente:

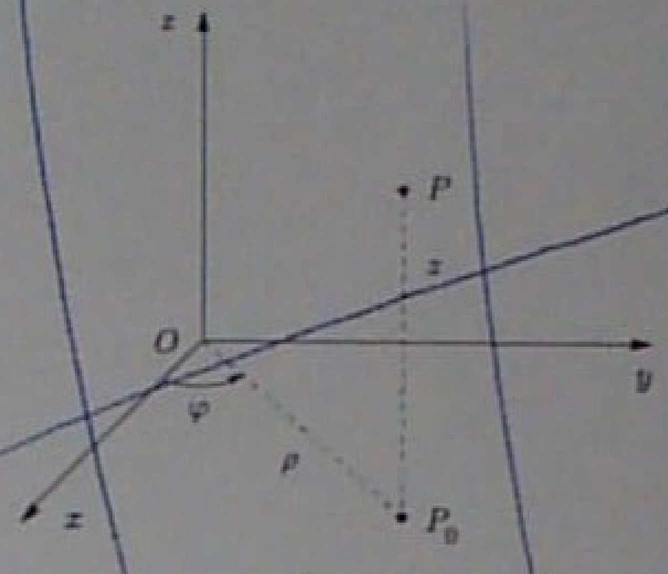

Fig. 5.9.3

Teorema 5.9.II – *Sia U un dominio limitato e misurabile dello spazio $\rho\varphi z$, contenuto in un parallelepipedo I $(a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \varphi \leq \beta, c \leq z \leq d)$, con $0 \leq a < b$, $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$, e sia T il dominio (limitato e misurabile) dello spazio xyz descritto dal punto $P \equiv (x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z)$ al variare del punto $Q \equiv (\rho, \varphi, z)$ in U. Allora, se $f(x, y, z)$ è una funzione continua in T, risulta*

$$\iiint_T f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_U f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz\,. \tag{5.9.5}$$

Si può ripetere qui un'osservazione analoga a quella fatta a proposito del teorema 5.9.I. Notiamo che l'espressione dell'*elemento di volume in coordinate cilindriche* risulta essere $\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$; lasciamo al lettore di darne la facile giustificazione intuitiva. Per applicazioni della (5.9.5) si veda il § 5.11.

5.10 Cenno sul cambiamento delle variabili negli integrali multipli

Riprendiamo la questione generale del cambiamento delle variabili negli integrali multipli in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\int_T f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n\,, \tag{5.10.1}$$

già prospettata all'inizio del § 5.8. Tale cambiamento sia definito da formule del tipo:

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.10.2}$$

Facciamo le seguenti ipotesi:

α) le funzioni (5.10.2) siano definite in un campo B dello spazio $u_1 u_2 \ldots u_n$ e ivi di classe C^1;

β) il determinante di ordine n i cui elementi sono le derivate parziali prime delle funzioni (5.10.2) o, come si dice, il *determinante jacobiano* (o semplicemente il *jacobiano*) *delle funzioni* (5.10.2):

$$J(u_1, u_2, \dots, u_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_n} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \tag{5.10.3}$$

si mantenga diverso da zero in tutto B.

In queste condizioni, si può dimostrare che, mentre il punto $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ descrive il campo B, il punto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che gli fanno corrispondere le (5.10.2), descrive anch'esso un *campo* A dello spazio $x_1 x_2 \dots x_n$. Facciamo allora quest'altra ipotesi:

γ) le (5.10.2) stabiliscano una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due campi A e B.

In quest'ipotesi, i numeri $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ corrispondenti ad un punto $P \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ possono assumersi come coordinate di P; esse prendono il nome di *coordinate curvilinee*.

Si dimostra il seguente teorema:

Teorema 5.10.I – *Nelle ipotesi* α), β), γ), *comunque si prenda un dominio* $U \subset B$, *le* (5.10.2) *gli fanno corrispondere in* A *un dominio* T *mutando punti interni di* U *in punti interni di* T *e punti di* ∂U *in punti di* ∂T. *Inoltre se il predetto dominio* U *è limitato e misurabile, allora anche il corrispondente dominio* T *riesce limitato e misurabile e si ha*

$$\operatorname{mis} T = \int_U |J(u_1, u_2, \dots, u_n)| du_1 du_2 \dots du_n . \tag{5.10.4}$$

Più generalmente per ogni funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *continua in* T *risulta*

$$\int_T f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \tag{5.10.5}$$

$$= \int_U f[\varphi_1(u_1, u_2, \dots, u_n), \varphi_2(u_1, u_2, \dots, u_n) \dots$$

$$\dots, \varphi_n(u_1, u_2, \dots, u_n)] |J(u_1, u_2, \dots, u_n)| du_1 du_2 \dots du_n .$$

Rinunciando al esporre la dimostrazione ci limitiamo a segnalare che la parte più delicata è nello stabilire la (5.10.4). Dopo ciò con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto per il teorema 5.8.II, si ottiene la (5.10.5).

Da (5.10.4), (5.10.5) appare che l'*elemento di misura nelle coordinate curvilinee* $u_1, u_2, \dots, u_n$ *risulta espresso da*

$$|J(u_1, u_2, \dots, u_n)| du_1 du_2 \dots du_n \tag{5.10.6}$$

Questo mostra l'analogia con la regola di sostituzione per gli integrali semplici. È chiaro infatti che quando in un integrale semplice si effettua il cambiamento di variabile $x = \varphi(t)$, il corrispondente jacobiano (5.10.3) risulta uguale a $\varphi'(t)$. D'altra parte sappiamo che l'elemento di lunghezza dx si trasforma in $\varphi'(t)dt$, espressione che è proprio del tipo (5.10.6), *però senza il simbolo di valore assoluto*. Ciò dipende dal fatto che per gli integrali semplici abbiamo introdotto un orientamento dell'intervallo di integrazione (col concetto di *integrale definito*), cosa non fatta per gli integrali multipli.

Osservazione I - Possiamo dare una giustificazione intuitiva della (5.10.6), limitandoci per semplicità agli integrali doppi ($n = 2$) e scrivendo le (5.10.2) sotto la forma

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v). \tag{5.10.7}$$

Tenuto fisso u, il punto (x, y) descrive una linea coordinata u = cost., analogamente, tenuto fisso v, tale punto descrive una linea coordinata v = cost. Assumiamo come elemento d'area il "*dominio infinitesimo*" T racchiuso fra due linee u = cost. infinitamente vicine e due linee v = cost., pure infinitamente vicine (fig. 5.10.1).

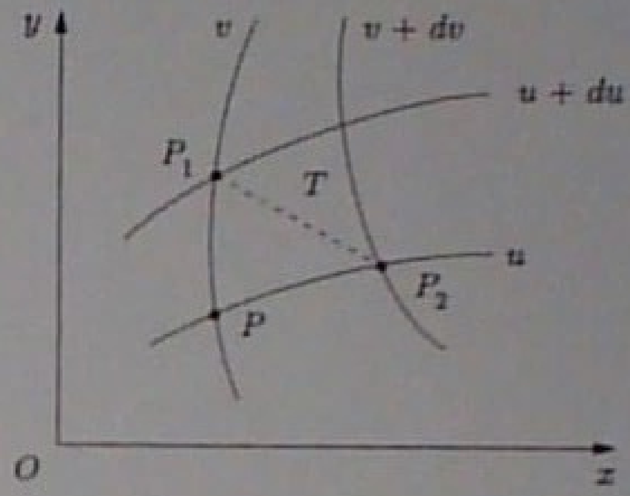

Fig. 5.10.1

Tale dominio T ha un'area che può valutarsi nel doppio dell'area del triangolo $PP_1\,P_2$. Dette x, y le coordinate di P, il punto P_1 ha coordinate prossime a $\left(x + \frac{\partial\varphi}{\partial u}du, y + \frac{\partial\psi}{\partial u}du\right)$ ed analogamente P_2 ha coordinate vicine a $\left(x + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv, y + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right)$. Perciò, per una nota formula di Geometria analitica, si può ritenere che area T sia uguale al valore assoluto di

$$2\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x + \frac{\partial\varphi}{\partial u}du & y + \frac{\partial\psi}{\partial u}du & 1 \\ x + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv & y + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}du & \frac{\partial\psi}{\partial u}du & 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv & \frac{\partial\psi}{\partial v}dv & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv\,,$$

cioè proprio al valore assegnato dalla (5.10.6).

* * *

Possiamo ritrovare come caso particolare della (5.10.6) gli elementi d'area e di volume già trovati nei § 5.8 e 5.9.

Nel caso delle *coordinate polari del piano* [in cui le (5.10.2) si scrivono $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$] il jacobiano vale

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho \geq 0\,,$$

quindi si ha la conferma che l'elemento d'area vale $\rho\, d\rho\, d\varphi$.